图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 李其琛，郭海兵，张恒主编.
-- 4版. -- 南京 ：南京大学出版社，2024.12(2025.6 重印)
ISBN 978-7-305-28013-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… ②郭… ③张… Ⅲ. ①概率论
-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.
①O21

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 037643 号

为选用教材教学提供：
免费 教学详解PPT
电子教学方案
详情请关注封底二维码

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　　邮　编 210093

书　　名 概率论与数理统计
GAILU LUN YU SHULI TONGJI
主　　编 李其琛　郭海兵　张　恒
责任编辑 唐甜甜　　　　编辑热线 025-83593947

照　　排 南京紫藤制版印务中心
印　　刷 江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本 787 mm×1092 mm　1/16　印张 14.25　字数 412 千
版　　次 2024 年 12 月第 4 版　2025 年 6 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-305-28013-9
定　　价 42.80 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象的数学学科，在生活中，存在着众多有趣的随机现象. 当你用智慧的眼睛去观察这个可爱的世界，就会发现其中的规律，这就是概率与统计的魔力. 在我们的意识中，或多或少都能根据观察到的随机现象作一些简单的分析，得到对自己有用的结果. 在现代社会，人们可以从大量的随机现象中挖掘信息，转化为数据，依靠先进的分析工具，得出结论或者根据结论作出合理的决策. 因此，概率论与数理统计是大学理工科，经济金融、管理等学科的必修课程.

本教材是在国内同类教材的基础上，结合我校多年对本二、本三不同专业讲授概率论与数理统计课程积累的经验编写的一本实用的公共必修课教材. 本教材的知识结构体系与国内主流的概率论与数理统计教材基本一致，但内容取材的安排上比较新颖，尽量做到通俗易懂、简单易学，既把握科学研究的需求，又重视实际生活的应用. 概率论与数理统计的研究对象、研究方法、思维方式与其他工科数学课程都有较大区别，因此教材力求做到体裁的组织与递进的难度符合学生的认知规律，强调知识的传授与启发式教学相结合，通过实际问题引入基本概念和建立基本定理，激发学生学习的兴趣，增强学生对概率论与数理统计的基本思想、基本方法的理解，逐步巩固学生对本课程的理论知识和应用方法的掌握.

概率论与数理统计历来以抽象难学著称，初学者在学习中会遇到一些困难. 因此，我们在例题的编写中尽量清楚阐述解题的思路、方法和步骤，以精选的例题来巩固学生的课堂知识. 本教材例题涉及面广，在例题选取和分析上把实用性放在重要位置，注重相关理论知识在科学和生活中的应用. 在习题的选择上，主要安排一些由浅入深、有助于加深基本概念和训练基本方法的习题，同时安排一些涉及通信、信息、经济、管理、医学、农业等方面的习题，使学生在获得概率论与数理统计的基本理论与方法的同时，也掌握一些解决实际问题的方法.

为加强读者对概率统计知识的掌握，在每章末都增加了一些概率与统计学家及其研究成果的简介，有助于读者对概率统计知识的深刻理解，以求使之达到既知其然，又知其所以然的效果.

为便于读者提高知识水平，教材在每一节都配备了适量的练习题，每一章配备了适量的综合习题，全书最后配备了两套综合复习题.

全书共八章，分为两大部分. 第一部分为概率论基础，包括前五章内容，第二部分为数理

统计,包括后三章内容.在概率论基础部分,我们将一维随机变量和多维随机变量分为两章,每章均包含离散型和连续型随机变量的有关内容,便于学生将离散型随机变量和连续型随机变量对比学习;在数理统计部分,着重介绍了统计的基本概念及估计的基本思想,略去了一般概率论与数理统计教材中所含的回归分析和方差分析的内容.教材总体设计为 48 课时.

在本书出版后,我们经过不断的教学实践,积累了不少经验,并吸收了广大读者的意见,修订稿正是在这一基础上完成的.我们修改了前几版中存在的不当之处,在内容上作了部分增减,致力于教材质量的提高.第四版在选材和叙述上有所侧重,尽量做到联系工科专业的实际,注重应用,力图将概念写得清晰易懂,以便于教学.我们在例题和习题的选择上继续做了努力,这些题目既具有启发性,又有广泛的应用性,从题目的广泛性也可看到本门课程涉及面之广.为了帮助读者抓住要点,提高学习质量和效率,在章末增写了“本章知识结构图”.知识结构图中所包含的内容,能起到提纲挈领的作用.

概率论中蕴含着深邃而迷人的哲思,关乎人类世界观的本质.我们身处的世界到底是概率随机的,还是因果定论的?这个对存在本质的追问,吸引众多数学家、科学家同时也是思想家、哲学家,为之求索辩论.本书第四版在章首增加了“思想万花筒”栏目,概括呈现古往今来那些无比宝贵迷人的数学思想,将概率统计的科学性、艺术性、哲思融为一炉,用诗意的语言 、玲珑剔透的直觉,聚焦数学思想的智慧之光,触发读者感悟数学的哲思与美之境.

本书可作为高等学校工科、理科(非数学专业)“概率论与数理统计”课程的教材,也可供工程技术人员参考.本书以纸质教材为中心,配套立体化教学资源,包含且不限于教学课件、教学方案、同步练习及其参考答案、复习题及其参考答案、综合应用题及其解析、兴趣拓展阅读.

李大潜院士、马吉溥教授、周明儒教授为本教材的顺利完成提出了许多宝贵的意见;淮海工学院理学院的领导以及全体教师对我们编写教材给予了大力支持;南京大学出版社及编辑为本教材的出版付出了辛勤劳动;南京航空航天大学吴和成教授通读了全书,提出了许多宝贵的意见.

由于我们的水平有限,虽经多次修改,错误和不足仍在所难免,恳请专家及读者批评指正.

作者

2024 年 12 月 3 日

目　　录

第1章 概率论的基本概念

上帝在星际对着地球人类机智地一笑——信仰客观存在世界中完备的定律和秩序的科学家惊讶地发现,原来上帝掷骰子随机地决定了世界.

思想万花筒

一花一世界

在公交车站候车时,总希望候车的时间比较短,但到底要等多长时间,事先不能确定;人们买彩票时,总希望自己中大奖,但能否中奖,结果也不确定.在现实生活中,有很多这类事情,其结果具有不确定性.人们还会关注这样的问题:公交车站候车时间少于5分钟的可能性有多大?彩票中奖的可能性有多大?等等.

概率论为解决这种不确定性问题提供了有效的方法.本章主要介绍概率论的基本概念.

§1.1 随机试验与随机事件

1.1.1 随机现象与随机试验

客观世界中发生的现象是多种多样的,归纳起来主要有两种:一种是必然现象(也称为确定性现象),另一种是随机现象.

必然现象是指在一定的条件下,必然发生的现象.例如,在一个标准大气压下,水加热到100℃便会沸腾,向上抛一粒石子必然下落,等等.

什么是随机现象?顾名思义,它是指一个随机的、偶然的自然现象或社会现象,它和必然现象是相对的.

例如,在相同的条件下,向上抛一枚质地均匀的硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,不论如何控制抛掷条件,在每次抛掷之前无法确定抛掷是什么结果,这样的试验就出现多于一种的可能结果.又如,同一门大炮对同一目标进行多次射击(同一型号的炮弹),每次炮弹着点可能不尽相同,并且每次射击之前无法肯定炮弹着点的确切位置.再如,重复地从同一生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡中抽取一只测量其寿命,每次结果可能不一样,并且每次抽取灯泡之前无法确切知道其寿命,等等.

以上所举的现象都具有随机性,即在一定条件下进行重复试验或观察会出现不同的结

果，而且在每次试验之前都无法预测将出现哪一种结果，这种现象称为**随机现象**.

如何来研究随机现象？随机现象是通过随机试验来研究的.那么，什么是随机试验？回答这个问题之前，先看几个例子.

【引例】 E_1：抛一枚硬币，观察静止之后哪一面朝上；

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：射击比赛，观察射击成绩（环数）；

E_4：从一批产品（含有正品和次品）中抽取3件产品，检验正品件数；

E_5：记录某公共汽车站某个时刻的候车人数；

E_6：从一批灯泡中抽取一只测量其寿命.

可以发现以上 $E_1 \sim E_6$ 都满足下述条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行（试验可重复性）；

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个（全部结果已知性）；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在试验之前却不能确定出现哪一种结果（试验前结果未知性）.

我们称这样的试验是一个**随机试验**（**random trial**），为方便起见，也简称为**试验**（**trial**），今后讨论的试验都是指随机试验.随机试验常用符号 E 来表示.

随机试验是一个广泛的数学术语，它包含各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的"观察"、"调查"或者"测量"等等.

1.1.2 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**（**sample space**），记作 S.样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**（**sample point**），记作 e.

【例1.1】 给出引例中随机试验 $E_1 \sim E_6$ 的样本空间.

E_1：$S=\{(\text{正面}),(\text{反面})\}$；

E_2：$S=\{1,2,\cdots,6\}$；

E_3：$S=\{0,1,2,\cdots,10\}$；

E_4：$S=\{0,1,2,3\}$；

E_5：$S=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

E_6：$S=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

样本空间的子集，称为**随机事件**，简称**事件**（**event**），一般用 A，B 等大写英文字母表示.例如，在试验 E_2 中，若 A 为"掷出奇数点"的事件，则 $A=\{1,3,5\}$；若 B 为"掷出的点数小于5"的事件，则 $B=\{1,2,3,4\}$；若 C 为"掷出的点数是3的倍数"，则 $C=\{3,6\}$.

所谓**事件 A 发生**，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的一个样本点出现.例如，在试验 E_2 中，若一次试验时出现的点数是"1点"，则事件 A 和事件 B 发生，而事件 C 没有发生.

只含有一个样本点的随机事件，称为**基本事件**.例如，试验 E_4 有4个基本事件 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**.样本空间 S 包含所有的样本点，每次试验它必然发生，因而是一个必然事件.必然事件用 S 表示.

在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为$\varnothing$. 它是样本空间的一个空子集.

1.1.3　事件之间的关系和运算

事件是一个集合，因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系及运算来处理. 下面来讨论事件之间的关系及其运算.

设 S 为试验 E 的样本空间，A，B，A_k（$k=1,2,\cdots$）为随机事件.

1. 子事件

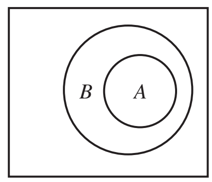
若事件 A 包含于事件 B 中，则称事件 A 是事件 B 的一个**子事件**，记为 $A\subset B$. $A\subset B$ 时，可知事件 A 发生，则事件 B 必然发生.

对任意事件 A，都有$\varnothing\subset A\subset S$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 是**相等**的，记为 $A=B$.

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，则 $A=\{1,3,5\}$. 记 $B=\{$掷出的点数小于 6$\}$，则 $B=\{1,2,3,4,5\}$. 显然，事件 A 发生时，事件 B 必然发生.

图 1-1 直观地描绘了事件 B 包含事件 A.



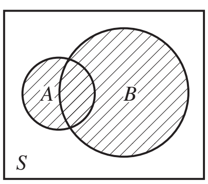
$A\subset B$

图 1-1

2. 和事件

事件 A，B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$. 事件 A 与事件 B 的和事件是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件，即

$$A\cup B=\{e\,|\,e\in A \text{ 或 } e\in B\}.$$



$A\cup B$

图 1-2

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，则 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{$掷出的点数是 3 的倍数$\}$，则 $B=\{3,6\}$，那么事件 A 与事件 B 的和事件 $A\cup B=\{1,3,5,6\}$.

图 1-2 给出了和事件 $A\cup B$ 的直观表示.

同理，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 积事件

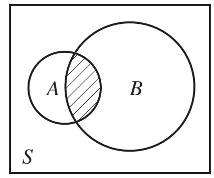
事件 A，B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$，也可简写为 AB. 事件 A 与事件 B 的积事件是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件，即

$$AB=\{e\,|\,e\in A \text{ 且 } e\in B\}.$$

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，则 $A=\{1,3,5\}$. $B=\{$掷出的点数是素数$\}$，则 $B=\{2,3,5\}$，于是积事件 $AB=\{3,5\}$.

积事件 AB 可以用图 1-3 来直观表示.

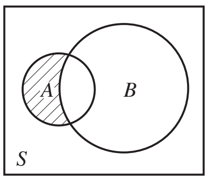
同理,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件可记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件可记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.



$A\cap B$

图 1-3

4. 差事件



$A-B$

图 1-4

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$,事件 A 与事件 B 的差事件是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件. 即

$$A-B=\{e\mid e\in A \text{ 且 } e\notin B\}.$$

容易推出 $A-B=A-AB$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇数点$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$. $B=\{$掷出的点数是素数$\}$,则 $B=\{2,3,5\}$,于是差事件 $A-B=\{1\}$.

差事件 $A-B$ 可以用图 1-4 来直观表示.

5. 互不相容(互斥)事件

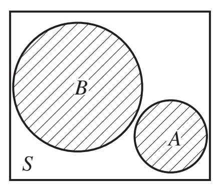
在一次试验中,若事件 A 和事件 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**,或称事件 A 与事件 B 是**互斥的**,即

$$A\cap B=\varnothing.$$

特别的,基本事件是两两互不相容的.

例如,在试验 E_2 中,令 $A=\{$掷出的点数至多为 3$\}$,$B=\{$掷出的点数大于 4$\}$,由于 $A=\{1,2,3\}$,而 $B=\{5,6\}$,在组成事件 A,B 的那些试验结果中并无公共(交叉)部分,故 $AB=\varnothing$,亦即事件 A,B 不会同时发生,所以 A,B 是互不相容的.

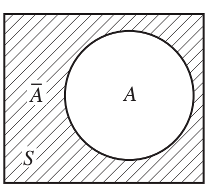
图 1-5 直观地表示了两事件互不相容的含义.



$A\cap B=\varnothing$

图 1-5

6. 对立事件



$A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing$

图 1-6

若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**,或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 事件 A 与事件 B 互为对立事件,是指事件 A 与事件 B 不能同时发生又不能同时不发生,即每次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

显然

$$\overline{A}=S-A, A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇数点$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{$掷出偶数点$\}$,则 $B=\{2,4,6\}$,$A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S$,所以 A,B 互为对立事件,于是 $B=\overline{A}$,$A=\overline{B}$.

图 1-6 直观地表示了两事件对立的含义.

对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

1.1.4　事件的运算律

设 A，B，C，$A_k(k=1,2,\cdots)$为事件，则有：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

德摩根(De Morgan)律

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

一般地说，对有限个事件及可列个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\ \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k},\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k},\ \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

【例 1.2】　设 A，B，C 为三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A，B，C 都发生；

(4) A，B，C 恰有一个发生；

(5) A，B，C 至少有一个发生；

(6) A，B，C 中不多于两个发生；

(7) A，B 至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A，B，C 恰有两个发生；

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) ABC；

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}$；

(5) $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或 $\overline{\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}}$；

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$；

(7) $(A\cup B)\overline{C}$ 或 $\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup AB\overline{C}$；

(8) $A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$.

【例 1.3】　设 $A=\{$甲产品合格$\}$，$B=\{$乙产品合格$\}$，试说明 $A\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$ 表示的事件.

解　$A\cup\overline{B}=\{$甲产品合格或乙产品不合格$\}$；

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{$甲产品和乙产品都不合格$\}$.

练习 1.1　封面扫码查看参考答案

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子点数之和;

(2) 某地铁站每隔5分钟有一列车通过,乘客对于列车通过该站的时间完全不知道,观察乘客候车的时间;

(3) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度;

(4) 连续抛一枚硬币,直至出现正面为止,观察抛硬币的次数.

2. 若要击落飞机,必须同时击毁2个发动机或击毁驾驶舱. 记:$A_1=\{$击毁第1个发动机$\}$,$A_2=\{$击毁第2个发动机$\}$,$B=\{$击毁驾驶舱$\}$. 试用 A_1,A_2 和 B 表示事件$\{$飞机被击落$\}$.

3. 设 A,B,C 表示三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1) 三个事件都不出现;

(2) 不多于一个事件出现;

(3) 三个事件至少有两个出现;

(4) A,C 至少一个出现,B 不出现.

4. 袋中有10个球,分别编有号码1~10. 从中任取1球,设 $A=\{$取得球的号码是偶数$\}$,$B=\{$取得球的号码是奇数$\}$,$C=\{$取得球的号码小于5$\}$,则下述运算表示什么事件:

(1) $A\cup B$; (2) AB; (3) AC; (4) $\overline{A}\,\overline{C}$; (5) $\overline{B\cup C}$.

5. 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三次,每次取一件,设 $A_i=\{$第 i 次抽到废品$\}$,$i=1,2,3$,试用 A_i 表示下列事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

§1.2 频率与概率

对于随机现象,仅仅考虑它的所有可能结果是没有什么意义的. 我们还要关心各种可能结果在一次试验中出现的可能性究竟有多大,从而可以在数量上研究随机现象.

随机现象具有偶然性的一面,在一次试验中的随机事件可能发生,也可能不发生. 但是经过长时间的实践与探索,人们发现,在多次重复试验中,某个事件的发生却呈现出明显的规律性. 这种规律性为我们用数来表示事件发生的可能性提供了客观的依据,为此我们从事件发生的频率谈起.

1.2.1 频率

设有随机试验 E,在相同的条件下,试验重复进行 n 次,在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**(**frequency**),记作 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=n_A/n$.

易知频率具有以下性质:

1° **非负性.** $f_n(A)\geqslant 0$；

2° **规范性.** $f_n(S)=1$；

3° **有限可加性.** 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 反映了事件 A 发生的频繁程度，$f_n(A)$ 越大，事件 A 发生就越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性也越大. 这种观点引导我们思考这样一个问题：是否可以用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小?

先看一个例子.

【例 1.4】 抛掷一枚均匀对称的硬币，事件 $A=\{$正面朝上$\}$，记录 A 发生的频数及频率，得到数据见表 1－1.

表 1－1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1－1 可以看出，当试验次数较少时，出现正面朝上的频率波动比较大，但是当试验次数增多时，正面朝上发生的频率明显在 0.5 左右波动.

历史上，也有一些统计学者做过类似的试验，根据资料记载，所得数据见表 1－2.

表 1－2

实 验 者	n	n_A	$f_n(A)$
德・摩根	2048	1061	0.5181
蒲　　丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1－2 可以看出，当次数增加时，频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 左右摆动，并且呈现出稳定于 0.5 的趋势. 频率的这种稳定性就是平常所说的统计规律性，它揭示了随机现象内在的必

然规律性，因此用频率的稳定值来刻画事件 A 发生的可能性的大小是合适的.

1.2.2 概率

定义 1.1（概率的统计定义） 设有随机试验 E，若当试验重复次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，则称数 p 为事件 A 发生的**概率**（**probability**）.

概率的统计观点主要是由奥地利数学家冯·米泽思（R. von Mises）和英国数学家费希尔（R. A. Fisher）发展的. 样本空间的概念主要是由冯·米泽思引进的. 这个概念使得有可能把概率的严格数学理论建立在测度论之上. 20 世纪 20 年代，在许多学者的影响之下，概率论的测度论方法逐渐形成. 现代概率的数学公理化处理，是由“苏联”数学家科尔莫戈罗夫（A. N. Kolmogorov）在 1933 年提出的.

在实际问题中，我们不可能对每个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生的可能性大小. 为了进一步研究的需要，统计学家结合了频率的稳定性和相关性以及测度论的相关知识，给出了数学角度的概率定义，也称为概率的公理化定义.

定义 1.2（概率的公理化定义） 设 E 是随机试验，S 为其样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**（**probability**），如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1° **非负性**. 对于每个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

2° **规范性**. 对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

3° **可列可加性**. 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1, 2, \cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-1}$$

由概率定义，可推导出一些重要性质.

1° $P(\varnothing)=0$.

证明 令 $A_n=\varnothing, n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\cdots$. 由（1-1）式的可列可加性，得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

2°（**有限可加性**）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1-2}$$

证明 令 $A_i=\varnothing, i=n+1, n+2, \cdots$，即有 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\cdots$. 由（1-1）式得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

3° 设 A, B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A), \tag{1-3}$$

$$P(B)\geqslant P(A).\tag{1-4}$$

证明　由 $A\subset B$,知 $B=A\cup(B-A)$,$A\cap(B-A)=\varnothing$,再由(1-2)式的有限可加性,得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

故

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

又由概率的非负性知,$P(B-A)=P(B)-P(A)\geqslant 0$,故(1-4)式成立.

一般地说,对于事件 A,B,总有 $AB\subset B$,故 $P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$.

4° 对于任意事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

证明　因为 $A\subset S$,由(1-4)式得

$$P(A)\leqslant P(S)=1.$$

5°(**逆事件的概率**)对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证明　因 $A\cup\overline{A}=S$,且 $A\cap\overline{A}=\varnothing$,由性质(1-2)式有限可加性,得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

6°(**加法公式**)对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).\tag{1-5}$$

证明　因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,由(1-2)式和(1-3)式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推广　(1) 对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\tag{1-6}$$

(2) 对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\\&\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}\tag{1-7}$$

【例 1.5】　设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 发生的概率分别是 0.4,0.3,0.6,$\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,求 $P(A\overline{B})$.

解　由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1,$$

所以

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

【例 1.6】　设 $P(A)=\dfrac{1}{3}$,$P(B)=\dfrac{1}{2}$.在下列三种情况下求 $P(B-A)$的值:

(1) $AB=\varnothing$；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) $AB=\varnothing$,于是 $P(AB)=0$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2};$$

(2) $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

练习 1.2 封面扫码查看参考答案

1. 已知 $P(A\cup B)=0.6$,$P(B)=0.3$,则 $P(A\overline{B})=$__________.

2. 设 A,B 为随机事件,$P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(\overline{AB})=$__________.

3. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则事件 A,B,C 都不发生的概率为__________.

4. 已知 $A\subset B$,$P(A)=0.2$,$P(B)=0.3$,求:

(1) $P(\overline{A})$,$P(\overline{B})$;(2) $P(A\cup B)$;(3) $P(AB)$;(4) $P(A-B)$.

5. 某一企业与甲、乙两公司签订某物资长期供货关系的合同,由以前的统计得知,甲公司能按时供货的概率为 0.9,乙公司能按时供货的概率为 0.75,两公司都能按时供货的概率为 0.7,求至少有一公司能按时供货的概率.

6. 某城市中发行两种报纸 A,B. 经调查,在这两种报纸的订户中,订阅 A 报的有 45%,订阅 B 报的有 35%,同时订阅 A,B 报纸的有 10%. 现随机抽取一个订户,求:

(1) 只订 A 报的概率;

(2) 只订 1 种报纸的概率.

7. 设 A,B 是两事件且 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$. 问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$有最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$有最小值,最小值是多少?

§1.3 古典概型与几何概型

概率论的基本课题之一就是寻求随机事件的概率. 本节主要介绍在概率论发展早期受到关注的两类试验模型:古典概型和几何概型.

1.3.1 古典概型

设 S 为随机试验 E 的样本空间,若随机试验 E 具有如下特征:

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点：$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$；

(2) 试验中的每个基本事件发生的可能性相同：$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$.
则称此试验模型为**等可能概型**. 它在概率论发展初期曾是主要的研究对象，所以也称为**古典概型**(**classical probability model**). 古典概型在概率论中占有相当重要的地位，一方面，由于它简单，对它的讨论有助于直观理解概率论的许多基本概念，因此常从讨论古典概型开始引入新的概念；另一方面，古典概型概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题以及理论物理的研究中都有重要应用.

下面来讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同，则

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的，于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),\end{aligned}$$

因此

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$，这里 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}. \tag{1-8}$$

(1-8)式就是古典概型中事件 A 的概率的计算公式.

【例 1.7】 将一枚均匀的硬币抛掷两次，试求至少出现一次正面的概率.

解 这是一个比较简单的古典概型，可直接写出样本空间和事件中的元素. 设 $A=\{$至少出现一次正面$\}$，样本空间 $S=\{$正正，正反，反正，反反$\}$，于是

$$A=\{\text{正正，正反，反正}\}.$$

故由(1-8)式知

$$P(A)=\frac{3}{4}.$$

对于比较简单的试验，可以直接写出样本空间 S 和事件 A，然后数出各自所含样本点的个数即可.

对于较复杂的试验，一般不再将 S 中的元素一一列出，而只需利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识分别求出 S 中与 A 中包含的基本事件的个数，再由(1-8)式即可求出 A 的概率.

【例 1.8】 设有 5 件产品，其中 3 件是正品，2 件是次品. 今从中抽取两次，每次 1 件，取出后不再放回. 试求：

(1) 两件都是正品的概率；

(2) 一件是正品一件是次品的概率；

(3) 至少有一件是正品的概率.

解 设 $A=\{$两件都是正品$\}$,$B=\{$一件是正品,一件是次品$\}$,$C=\{$至少有一件是正品$\}$,则:

基本事件总数 $n=P_5^2=5\times4=20$;

而 A 所包含的基本事件数 $k_A=P_3^2=3\times2=6$;

B 所包含的基本事件数 $k_B=P_3^1P_2^1+P_2^1P_3^1=3\times2+2\times3=12$;

C 所包含的基本事件数 $k_C=P_3^1P_2^1+P_2^1P_3^1+P_3^2=12+6=18$.

故由(1-8)式得:

(1) $P(A)=\dfrac{k_A}{n}=\dfrac{3}{10}$;

(2) $P(B)=\dfrac{k_B}{n}=\dfrac{3}{5}$;

(3) $P(C)=\dfrac{k_C}{n}=\dfrac{9}{10}$.

注:(1) 在例 1.8(3)中,若利用 $P(\overline{C})$ 来求 $P(C)$ 则更为简单. 因为 $\overline{C}=\{$两件产品均为次品$\}$,所以

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{P_2^2}{20}=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}.$$

(2) 本例也可另外设计样本空间. 若对于取出的两件产品不考虑其先后次序,则有

$$n=C_5^2=\frac{5\times4}{2!}=10,k_A=C_3^2=3,k_B=C_3^1C_2^1=6,k_{\overline{C}}=C_2^2=1,$$

于是

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{3}{10},P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{3}{5},P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

应特别注意的是,为了便于问题的解决,样本空间可以作不同的设计,但必须满足等可能的要求.

由上两例总结出古典概型中事件概率计算的一般步骤:
第一步:用字母 A 表示所要求概率的事件;
第二步:恰当选取样本空间 S,并计算 S 中所含样本点的总数 n;
第三步:计算要求概率的事件 A 中包含样本点的个数 k;
第四步:由古典概型计算公式(1-8)得到 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

1.3.2 古典概型的经典问题

下面介绍古典概型中比较经典的几个问题,以此建立数学模型,我们可以用来解决很多相类似的概率问题.

【例 1.9】(分球入盒问题) 将 n 只球随机地放入 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中,试求每个盒子中至多有一只球的概率(设盒子的容量不限).

解　将 n 只球放入 N 个盒子中去，每一种放法是一个基本事件. 易知，这是古典概型问题.

第一步：设 $A=\{$每个盒子中至多有一只球$\}$；

第二步：因每一只球都可以放入 N 个盒子中的任一个盒子，故共有 $N\times N\times\cdots\times N=N^n$ 种不同的放法；

第三步：每一个盒子中至多一只球共有 $N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$ 种不同放法.

第四步：因而所求的概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots[N-(n-1)]}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}.$$

有许多问题和本例具有相同的数学模型. 例如，假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于 $\frac{1}{365}$，那么随机选取 $n(n\leqslant 365)$ 个人，他们的生日各不相同的概率为

$$\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

因而，n 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$p=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

经计算可得表 1－3 结果.

表 1－3

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

从表 1－3 可以看出，在仅有 64 人的班级里，“至少有两人生日相同”这一事件的概率与 1 相差无几，因此，如做调查的话，几乎总是会出现的.

【例 1.10】（抽签问题）　袋中有 a 支白签、b 支红签，依次将签一支支抽出，取出后不放回. 求：第 k 次抽到白签的概率（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

解　解法一

第一步：设 $A=\{$第 k 次抽到白签$\}$；

第二步：把 a 支白签、b 支红签都看作是不同的（例如设想把它们编号），若把抽出的签依次放在排列成一直线的 $(a+b)$ 个位置上，则可能的排列法相当于把 $(a+b)$ 个元素进行全排列，总数为 $(a+b)!$，这就是样本点的全体；

第三步：因为第 k 次抽出白签有 a 种取法，而 $(a+b-1)$ 次抽签相当于把 $(a+b-1)$ 支签进行全排列，有 $(a+b-1)!$ 种构成法，故 $k_A=a\times(a+b-1)!$；

第四步：所求概率为

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二

第一步：设 $A=\{$第 k 次抽到白签$\}$；

第二步：把 a 支白签、b 支红签都看作是没有区别的.仍把抽出的签依次放在排列成一条直线的 $(a+b)$ 个位置上，因若把 a 支白签的位置固定下来，则其他位置必然是放红签，而白签的位置可以有 C_{a+b}^{a} 种做法，这样把样本空间缩小；

第三步：这时 $k_A=C_{a+b-1}^{a-1}$，这是因为第 k 次抽出白签，这个位置必须放白签，剩下的白签可以在 $(a+b-1)$ 个位置上任取 $(a-1)$ 个位置，因此共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法；

第四步：所以所求的概率

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

注意考察两种解法的不同，就会发现主要在于选取样本空间不同.前一种解法中把签看作是“有个性的”，而在后一种解法中，则对同色签不加区别，因此在第一种解法中要顾及各白签及红签间的顺序而用排列，第二种解法则不注意顺序而用组合，但最后得出了相同的答案.

本题还可用选排列的方法求解.

解法三　设想签是编号的.

第一步：设 $A=\{$第 k 次抽到白签$\}$；

第二步：一支支抽取直至第 k 次抽出白签为止，则基本事件总数是从 $(a+b)$ 支编号的签中选出 k 支签进行排列的个数，即 $n=P_{a+b}^{k}$；

第三步：A 的发生相当于从 a 支白签中选出一支放在第 k 个位置上，从 $(a+b-1)$ 支签中任选 $(k-1)$ 支签放在前面 $(k-1)$ 个位置上，于是由乘法原理，得 $k_A=P_{a}^{1}P_{a+b-1}^{k-1}$；

第四步：

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{P_{a}^{1}P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}\\&=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

这个结果与 k 无关！细想一下，就会发觉这个结果与我们平常的生活经验是一致的.例如，在体育比赛中进行抽签，对各队机会均等，与抽签的先后次序无关，也就是说对参与者来说都是公平的.

【例 1.11】（**数整除问题**）　在 1～2000 数据中随机抽取 1 个整数，问取到的整数不能被 6 和 8 整除的概率是多少？

解　设 $A=\{$取到的整数能被 6 整除$\}$，$B=\{$取到的整数能被 8 整除$\}$，$C=\{$取到的整数不能被 6 和 8 整除$\}$.因为 $333<\frac{2000}{6}<334$，$\frac{2000}{8}=250$，6 与 8 的最小公倍数 24，$83<\frac{2000}{24}<84$，故

$$P(A)=\frac{333}{2000},P(B)=\frac{250}{2000},P(AB)=\frac{83}{2000},$$
$$P(C)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{3}{4}.$$

【例1.12】(超几何概型)　如果某批产品中有 a 件正品、b 件次品. 从中用放回和不放回两种抽样方式抽取 n 件产品,问其中恰有 $k(k\leqslant n)$ 件次品的概率是多少?

解　(1) 放回抽样

第一步:设 $A=\{$其中恰有 k 件次品$\}$;

第二步:从 $(a+b)$ 件产品中有放回地抽取 n 件产品,所有可能的取法有 $(a+b)^n$ 种;

第三步:取出的 n 件产品中有 k 件次品,它们可以出现在不同的位置上. 所有可能的取法有 C_n^k 种. 对于取定的一种位置,由于取正品有 a 种可能,取次品有 b 种可能,即有 $a^{n-k}b^k$ 种可能,于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的可能取法共有 $C_n^k a^{n-k}b^k$ 种;

第四步:所求概率为

$$p_1=\frac{C_n^k a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{a+b}\right)^k.$$

(2) 不放回抽样

第一步:设 $A=\{$其中恰有 k 件次品$\}$;

第二步:从 $(a+b)$ 件产品中抽取 n 件(不计次序)的所有可能的取法有 C_{a+b}^n 种;

第三步:在 a 件正品中取 $(n-k)$ 件的所有可能的取法有 C_a^{n-k} 种,在 b 件次品中取 k 件的所有可能的取法有 C_b^k 种;

第四步:所求概率为

$$p_2=\frac{C_a^{n-k}C_b^k}{C_{a+b}^n}.$$

这个公式称为**超几何分布**的概率公式.

1.3.3　几何概型

古典概型假定试验结果是有限个,这限制了它的适用范围. 一个直接的推广是保留等可能性,而允许试验结果可为无限个,这种试验模型称为几何概型.

定义1.3　设样本空间是一个有限区域 S. 若样本点落在 S 内的任何区域 G 中的事件 A 的概率与区域 G 的测度(长度、面积或体积等)成正比,则区域 S 内任意一点落在区域 G 内的概率为区域 G 的测度与区域 S 的测度的比值,即

$$P(A)=\frac{G\text{ 的测度}}{S\text{ 的测度}}.$$

这一类概率通常称为**几何概率**.

因为几何概率的定义及计算与几何图形的测度密切相关,所以,我们所考虑的事件应是某种可定义测度的集合,且这类集合的并、交也是事件.

常见的几何概率有以下三种情况.

(1) 设线段 l 是线段 L 的一部分. 向线段 L 上任投一点,若点落在线段 l 上的概率与线段 l 的长度成正比,而与线段 l 在线段 L 上的相对位置无关,则点落在线段 l 上的概率为

$$p=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}.$$

(2) 设平面区域 g 是平面区域 G 的一部分. 向区域 G 上任投一点,若点落在区域 g 上的概率与区域 g 的面积成正比,而与区域 g 在区域 G 上的相对位置无关,则点落在区域 g 上的概率为

$$p=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}.$$

(3) 设空间区域 v 是空间区域 V 的一部分,向区域 V 上任投一点. 若点落在区域 v 上的概率与区域 v 的体积成正比,而与区域 v 在区域 V 上的相对位置无关,则点落在区域 v 上的概率为

$$p=\frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}.$$

【例 1.13】 随机地向区间 $[0,5]$ 内掷一点,求点落在区间 $[1,3]$ 的概率.

解 "随机地"即表示试验结果的等可能性,点落在区间 $[0,5]$ 内任何区间的概率与该区间的长度成正比,又因试验结果为无限个,于是问题归结为线段上的一个几何概型.

样本空间 L 是区间 $[0,5]$,长度为 5,而 l 是区间 $[1,3]$,长度为 2,由几何概率计算公式有

$$p=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}=\frac{2}{5}.$$

【例 1.14】 从区间 $(0,1)$ 内任取两个数,求这两个数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

解 设从区间 $(0,1)$ 内任取两个数为 x 与 y,则 x 与 y 的变化范围为

$$G=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}.$$

如图 1-7 所示,样本空间 G 是边长为 1 的正方形,两个数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的充要条件为

$$xy<\frac{1}{4},0<x<1,0<y<1.$$

也就是说,当样本点 (x,y) 落在由双曲线 $xy=\frac{1}{4}$ 及四条直线 $x=0,x=1,y=0,y=1$ 所围成的区域 g 内时(见图 1-7),两个数的积小于 $\frac{1}{4}$,于是所求的概率

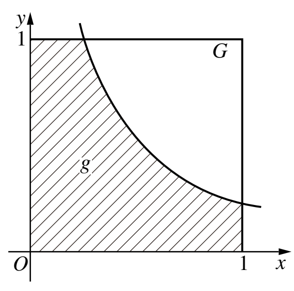


图 1-7

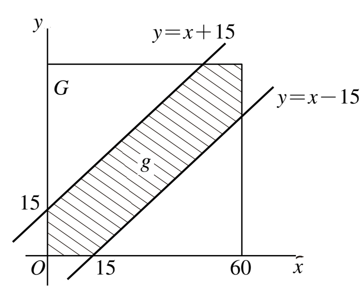


图 1-8

$$p=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{4}\times 1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

几何概型讨论的是无限样本空间中的概率问题,其在现实中应用十分广泛.

【例 1.15】(约会问题)　一位男生和一位女生约定晚饭后 18:00 到 19:00 之间在教学主楼后的左边第三棵柳树下见面.双方约定,先到者必须等候另一个人 15 min,过时如另一人仍未到达则离去,问两人见面的机会有多大?

解　设 x 与 y 分别表示男生和女生到达约会地点的时间(为计算方便,从 18 时开始计时,以分钟为单位),建立平面直角坐标系如图 1 - 8 所示.所有可能到达时间的组合,即 (x,y) 的所有可能结果构成边长为 60 的正方形.另外,由题意知,两人能够会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 15$,可能会面的时间组合由图中的阴影部分所表示.假设两人到达约会地点的时间在这 1 h 中是等可能的,则此约会问题便是一个几何概型问题.样本空间 G(见图 1 - 8)为

$$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 60\},$$

两个人能见面的事件 g 为

$$g=\{(x,y)\mid (x,y)\in G,|x-y|\leqslant 15\},$$

故两人能见面的概率

$$p=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

练习 1.3　封面扫码查看参考答案

1. 将一枚均匀的骰子掷两次,则两次出现的最小点数等于 4 的概率为__________.

2. 在区间(0,1)上随机地取一个数 x,则事件“x 到点 $\frac{5}{8}$ 距离小于 $\frac{1}{8}$”的概率为__________.

3. 一个口袋装有 10 个外形相同的球,其中 6 个是白球,4 个是红球,“无放回”地从袋中取出 3 个球,求下述诸事件发生的概率.

(1) $A_1=\{$没有红球$\}$;(2) $A_2=\{$恰有两个红球$\}$;(3) $A_3=\{$至少有两个红球$\}$;

(4) $A_4=\{$至多有两个红球$\}$;(5) $A_5=\{$至少有一个白球$\}$;(6) $A_6=\{$颜色相同的球$\}$.

4. 电话号码由 6 个数字组成,每个数字可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数(但第 1 个数字不能为 0),求电话号码由完全不相同的数字组成的概率.

5. 一个寝室住 4 个人,假定每个人的生日在 12 个月中的某一个月是等可能的,求至少有 2 个人的生日在同一个月的概率.

6. 在 1~1000 数据中随机取一整数,取到的整数能被 4 或 6 整除的概率是多少?

7. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

8. 在区间 [0,1] 中随机地取出两个数,求两者之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率.

9. 某码头只能容纳一只船停泊,现预知某日将独立到来两只船,且在 24 h 内各时刻到

来的可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别是 3 h 及 4 h，试求一船要在江中等待的概率.

§1.4 条件概率

1.4.1 条件概率

在实际问题中，常常会遇到这样的问题：在已知事件 A 发生的条件下探求事件 B 发生的概率. 例如，天气预报，经济预测等等，都是基于既有事件发生的条件下研究另一事件的概率. 这时，因为求 B 的概率是在已知 A 发生的条件下，所以称为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为 $P(B|A)$.

【引例】 掷一粒骰子，已知掷出了偶数点，求掷出的点数小于 3 的概率.

解 设 $A=\{$掷出的是偶数点$\}$，$B=\{$掷出的点数小于 3$\}$，则所求问题就是求概率 $P(B|A)$.

显然试验的样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，其样本点总数 $n=6$. 事件 $A=\{2,4,6\}$. 在 A 已经发生的条件下，试验的样本空间发生了变化，样本空间缩小为 A，"掷出了偶数点且点数小于 3"这一事件为 $AB=\{2\}$，记 k_A 为缩小后的样本空间 A 的样本点总数，k_{AB} 表示 AB 的样本点数，则由古典概型可知

$$P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{k_{AB}}{k_A}=\frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_A}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

由此引入条件概率的一般定义：

定义 1.4 设 A，B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-9}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**(**conditional probability**).

【例 1.16】 甲、乙两座城市都位于长江的下游，根据近 100 年的气象记录知道：甲、乙两市一年中雨天占的比例分别是 20%和 18%，两市同时下雨占的比例是 12%. 问：

(1) 乙市为雨天时，甲市也为雨天的概率是多少？

(2) 甲市为雨天时，乙市也为雨天的概率是多少？

解 设事件 $A=\{$甲市为雨天$\}$，$B=\{$乙市为雨天$\}$，则依题意得

$$P(A)=0.2,P(B)=0.18,P(AB)=0.12.$$

因此根据(1-9)式，可以得到：

(1) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.12}{0.18}=0.67$；

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.12}{0.20}=0.6$.

由于条件概率本身就是概率，因此具备概率定义中的三条基本性质：

1° **非负性**：$P(A|B)\geqslant 0$；

2° **规范性**：$P(S|B)=1$；

3° **可列可加性**：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

同时，概率的一般性质，条件概率也满足，例如：

(1) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$；

(2) $P(A_1 \cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

1.4.2　乘法公式

由条件概率的定义容易推得概率的**乘法公式**(**multiplication formula**)：

(1) 若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A). \tag{1-10}$$

(2) 若 $P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(B)P(A|B). \tag{1-11}$$

乘法公式可以推广到 n 个事件的情形：若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1-12}$$

利用公式(1-10)(1-11)(1-12)可以计算积事件的概率.

【例 1.17】　100 株玉米，已知病株率为 10%，每次检查时从中任选一株，检查后做上标记不再检查，求第三次才取得健康株的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 次取得健康株$\}$，$i=1,2,3$，依题意得

$$P(\overline{A}_1)=\frac{10}{100}, P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{9}{99}, P(A_3|\overline{A}_2\overline{A}_1)=\frac{90}{98},$$

因此，第三次才取到健康株的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_2\overline{A}_1)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=0.0083.$$

【例 1.18】　元青花(瓷器)以其造型独特，胎体厚重而享有盛誉，假设一件瓷器在过去未被打破，在新的一年中被打破的概率是 0.03. 延祐元年时的瓷器保存到现在(约 700 年)的概率为多少?

解　用 $A_i=\{$该瓷器第 i 年没有被打破$\}$，$i=1,2,\cdots,700$，则至今没有被打破的概率是

$$\begin{aligned} p &=P(A_1A_2\cdots A_{700}) \\ &=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{700}|A_1A_2\cdots A_{699}) \\ &=(1-0.03)^{700}=5.54\times 10^{-10}. \end{aligned}$$

这个概率是如此之小，可见一件瓷器保存至今是非常珍贵的。

【例 1.19】　袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取出后不放回，求：

(1) 已知第一人取到黄球，第二人取到黄球的概率；

(2) 第二人取到黄球的概率.

解 设 $A_1=\{$第一人取到黄球$\}$,$A_2=\{$第二人取到黄球$\}$,因此有:

(1) 第一人取到黄球后,袋中球总数为 49 个,其中黄球 19 个,这时第二人取到黄球的概率为

$$P(A_2|A_1)=\frac{19}{49}=0.388.$$

(2) 由于 A_2 的发生是基于第一人取球情况来考虑的,而第一人取球所有的可能结果是取到黄球和取到白球两种,故“第二个人取到黄球”分为“第一人取到黄球,第二人取到黄球”和“第一人取到白球,第二人取到黄球”两种情况,所以有

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})\\&=\frac{20}{50}\times\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

比较(1)和(2)的结果,显然,在第一人取球情形已知和未知两种条件下,第二人取到黄球的概率是不相同的.

1.4.3 全概率公式

在例 19(2)的计算中,为了计算的简便,我们把“第二人取到黄球的概率”这一事件分解成“第一人取到黄球,第二人取到黄球”和“第一人取到白球,第二人取到黄球”两个简单事件,然后再利用乘法公式求解. 在概率论中,为了计算复杂事件的概率,经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件的和,通过分别计算简单事件的概率,来求得复杂事件的概率. 对这种分解,给出如下的定义.

定义 1.5 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个事件组,满足:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容;

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个**划分(division)**.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间的一个划分,则每次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有且仅有一个发生,如图 1-9 所示.

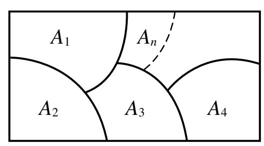


图 1-9

全概率公式(complete probability formula):设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对 S 中的任意一个事件 B,都有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n).\quad(1-13)$$

证明 因为

$$B=BS=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n.$$

由假设可知$(BA_i)(BA_j)=\varnothing,i\neq j$,得到

$$\begin{aligned}P(B)&=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n).\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时,全概率公式一般表示为如下形式:

$$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A}). \tag{1-14}$$

【例 1.20】 某保险公司认为，人可以分为两类，一类是容易出事故，另一类则比较谨慎，他们的统计结果表明，一个易出事故的人在一年内出一次事故的概率是 0.4，而对于比较谨慎的人来说这个概率是 0.2.若第一类人占 30%，那么一个新保险客户在他购买保险后一年内将出现一次事故的概率是多少？

解　令 B={保险客户在一年内出一次事故}，A={容易出事故的客户}，$\overline{A}$={比较谨慎的客户}，由已知条件可知

$$P(A)=0.3,P(\overline{A})=0.7,P(B|A)=0.4,P(B|\overline{A})=0.2,$$

于是由(1-14)式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.3\times0.4+0.7\times0.2=0.26.$$

【例 1.21】 设某一仓库有一批产品，已知其中 50%，30%，20%依次是甲、乙、丙厂生产的，且甲、乙、丙厂生产的次品率分别为$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$，现从这批产品中任取一件，求取得正品的概率是多少？

解　设 A_1={取得的产品由甲厂生产}，A_2={取得的产品由乙厂生产}，A_3={取得的产品由丙厂生产}，B={取得的产品是正品}，由已知条件得

$$P(A_1)=\frac{5}{10},P(A_2)=\frac{3}{10},P(A_3)=\frac{2}{10},P(B|A_1)=\frac{9}{10},P(B|A_2)=\frac{14}{15},P(B|A_3)=\frac{19}{20},$$

由(1-13)式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{14}{15}+\frac{2}{10}\times\frac{19}{20}=0.92.\end{aligned}$$

思考：在例 21 中，假设已知取得的是一个正品，那么它出自甲厂的概率是多少呢？这个问题，我们可以在下面予以解决.

1.4.4 贝叶斯公式

设 B 是样本空间 S 的一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_k)>0,k=1,2,\cdots,n,P(B)>0$，则

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)}. \tag{1-15}$$

这个公式称为**贝叶斯公式(Bayesian formula)**，也称为**后验公式**.这一公式是英国数学家托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)的成果.

【例 1.21】续　假设已知取得的是一个正品，那么它出自甲厂的概率是多少呢？

解　已知取得的是一个正品，那么它出自甲厂的概率为 $P(A_1|B)$，由(1-15)式得：

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}}{\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{14}{15}+\frac{2}{10}\times\frac{19}{20}}\approx 0.49.$$

【例 1.22】 A,B,C 三位厨师烤某一种饼,烤坏的概率依次为 4%,2%,5%. 若在他们工作的餐馆,所烤的这种饼中,厨师 A 占 45%,B 占 35%,C 占 20%.

(1) 求任取一块饼,烤坏的概率;

(2) 现取出的饼烤坏了,求它由厨师 A 烤出的概率.

解 (1) 设 $E=\{$饼烤坏了$\}$,$D_1=\{$饼是厨师 A 烤的$\}$,$D_2=\{$饼是厨师 B 烤的$\}$,$D_3=\{$饼是厨师 C 烤的$\}$,则

$$P(D_1)=45\%,P(D_2)=35\%,P(D_3)=20\%,$$
$$P(E|D_1)=4\%,P(E|D_2)=2\%,P(E|D_3)=5\%.$$

(1) 由全概率公式得:

$$\begin{aligned}P(E)&=P(D_1)P(E|D_1)+P(D_2)P(E|D_2)+P(D_3)P(E|D_3)\\&=45\%\times4\%+35\%\times2\%+20\%\times5\%=0.035.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式知:

$$\begin{aligned}P(D_1|E)&=\frac{P(D_1)P(E|D_1)}{P(D_1)P(E|D_1)+P(D_2)P(E|D_2)+P(D_3)P(E|D_3)}\\&=\frac{45\%\times4\%}{0.035}\approx0.514.\end{aligned}$$

全概率公式和贝叶斯公式是概率论中的两个重要公式,有着广泛的应用. 若把事件 A_i 理解为"原因",而把事件 B 理解为"结果",则 $P(B|A_i)$是原因 A_i 引起结果 B 出现的可能性,$P(A_i)$是各种原因出现的可能性. **全概率公式表明综合引起结果的各种原因,导致结果出现的可能性的大小;而 Bayes 公式则反映了当结果出现时,它是由原因 A_i 引起的可能性的大小**,故常用于可靠性问题,如可靠性寿命检验、可靠性维护、可靠性设计等.

练习 1.4 封面扫码查看参考答案

1. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,则 $P(A\cup B)=$ ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

2. 某仓库有同样规格的产品 6 箱,甲、乙、丙 3 个厂各生产 3 箱、2 箱和 1 箱. 甲、乙、丙 3 个厂的次品率分别为 $\frac{1}{10}$,$\frac{1}{15}$,$\frac{1}{20}$. 任取 1 件,取得的是次品的概率是 ( )

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{20}$ D. $\frac{29}{360}$

3. 某人有一笔资金,他投入基金的概率为 0.58,购买股票的概率为 0.28,两项投资都做的概率为 0.19.

(1) 已知他已投入基金，再购买股票的概率是多少？

(2) 已知他已购买股票，再投入基金的概率是多少？

4. 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B|A)=0.8$，求 $P(AB), P(\overline{A}\,\overline{B})$.

5. 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

6. 据以往资料表明，某一3口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病$|$孩子得病$\}=0.5$，$P\{$父亲得病$|$母亲及孩子得病$\}=0.4$.

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

7. 为了防止意外，在矿井内同时设有甲、乙两种报警系统，每种系统单独使用时，甲系统的有效概率为0.92，乙系统为0.93，在甲系统失灵的情况下，乙系统仍有有效概率为0.85.求：

(1) 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(2) 在乙系统失灵的条件下，甲系统仍有有效的概率.

8. 某学生为找一份新工作希望她的导师提供一份推荐信.她估计如果有一份好的推荐信就有80%的机会得到新工作，一般的推荐信有40%的机会得到新工作，差的推荐信有10%的机会得到新工作.她又估计得到推荐信是好的、一般的、差的概率分别是0.7，0.2，0.1.问：

(1) 她有多大可能得到新工作？

(2) 已知她得到新工作，收到好的推荐信有多大可能？

(3) 已知她没有得到新工作，她收到差的推荐信的可能有多大？

§1.5　事件的独立性

1.5.1　事件的独立性

设 A,B 是两个事件，根据上节例子可以看出，一般来说 $P(A|B)\neq P(A)$，这表明事件 B 的发生提供了一些信息影响了事件 A 发生的概率.但是在有些实际问题中 $P(A)$ 与 $P(A|B)$ 是相等的，这种情况表明事件 A 发生的概率不受"事件 B 已发生"这个附加条件影响，也称事件 A 与 B 是**相互独立的**.

【引例】　假设试验 E 为"掷两次硬币，观测正反面情况"，事件 $A=\{$第一次出现正面$\}$，$B=\{$第二次出现正面$\}$. E 的样本空间为

$$S=\{\text{正正,正反,反正,反反}\}.$$

根据古典概型的计算公式得

$$P(A)=P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(B|A)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{1}{4}.$$

在此，我们看到 $P(B|A)=P(B)$.事实上，生活的常识也告诉我们，两次出现正面是相互没有影响的.这时，由乘法公式可知

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

由此引出下面的定义.

定义 1.6 对于事件 A 与 B,若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立,则称事件 A 与 B 是**相互独立的**(**mutual independence**),简称**独立**.

【例 1.23】 设事件 A 与 B 相互独立,并且 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.3$,求 $P(A\cup B)$.

解 $$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+0.3-0.5\times0.3=0.65.\end{aligned}$$

在本题中,若不知道 A 与 B 相互独立,则 $P(A\cup B)$是求不出来的.

关于事件的独立性,有如下的定理.

定理 1.1 若四对事件 A 与 B,$\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的,则另外三对也是相互独立的.

证明 不妨设 A 与 B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

(1) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)[1-P(A)]=P(B)P(\overline{A})$.

因此 $\overline{A}$ 与 B 相互独立.

(2) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$.

因此 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

(3) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是相互独立的,留作习题,请读者自己证明.

值得说明的是,在实际应用中,两个事件是否相互独立,我们往往从直觉上加以判断,如果两个事件发生与否,彼此间没有影响或者影响很弱,则认为这两个事件是相互独立的.例如,连续掷两颗骰子,可以从直觉上看出,这两颗骰子出现的点数是没有影响的,因而是相互独立的.但是,在有些情况下只凭直觉来判别事件是否相互独立就比较困难了,此时需要从事件相互独立的定义出发进行验证,以下的例子说明了这一点.

【例 1.24】 一个家庭中有 3 个小孩,假设事件 A={家中男孩女孩都有},事件 B={家中至多有一个女孩},问:

(1) 事件 A,B 是否相互独立?

(2) 当这个家庭有两个小孩时,事件 A,B 是否相互独立?

解 (1) 样本空间

S={(男男男),(男男女),(女男男),(男女男),(女女男),(女男女),(男女女),(女女女)},

A={(男男女),(女男男),(男女男),(女女男),(女男女),(男女女)},

B={(男男男),(男男女),(女男男),(男女男)},

则

AB={恰好一个女孩}={(男男女),(女男男),(男女男)}.

因此

$$P(A)=\frac{6}{8},P(B)=\frac{4}{8},P(AB)=\frac{3}{8}.$$

所以 $P(AB)=\frac{3}{8}=\frac{6}{8}\times\frac{4}{8}=P(A)P(B)$.因此 A,B 相互独立.

(2) 当这个家庭只有两个小孩的时候，样本空间 $S=\{(男男),(男女),(女男),(女女)\}$，则

$$A=\{(男女),(女男)\},$$
$$B=\{(男男),(男女),(女男)\},$$
$$AB=\{恰好一个女孩\}=\{(男女),(女男)\}.$$

因此

$$P(A)=\frac{2}{4},P(B)=\frac{3}{4},P(AB)=\frac{2}{4}.$$

由于不满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 不相互独立.

【例 1.25】 在通常情况下，股市中有些股票的涨跌是相互独立的，有些股票是相互联系的. 根据股市的情况假设甲、乙两种股票上涨的概率分别是 0.9 和 0.8，某位股民决定购买这种股票，假设他们涨跌是相互独立的，求买入的股票至少有一种上涨的概率.

解 设 $A=\{甲股票上涨\}$，$B=\{乙股票上涨\}$，那么 $A\cup B=\{至少有一种上涨\}$. 因为 A 与 B 相互独立，所以，有

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98.\end{aligned}$$

事件的独立与互不相容是两个不同的概念，互不相容表示两个事件不能同时发生，而独立则表示它们彼此不影响.

定义 1.7 设 A,B,C 是三个事件，如果满足：

$$P(AB)=P(A)P(B),P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称这三个事件 A,B,C **相互独立.**

事件的相互独立的概念可推广到多个事件的情形.

定义 1.8 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，若对任意 $k(1<k\leqslant n)$，对任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立.**

n 个事件相互独立，则必须满足 (2^n-n-1) 个等式.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意多个事件换成它们的逆事件，所得的 n 个事件仍然相互独立，因此有：

(1) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$；

(2) $$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}).\end{aligned}$$

【例 1.26】 张、王、赵三同学各自独立地去解一道数学难题，他们的解出的概率分别为 1/5，1/3，1/4，试求：(1) 恰有一人解出的概率；(2) 难题被解出的概率.

解 设 $A_1=\{张同学解出难题\}$，$A_2=\{王同学解出难题\}$，$A_3=\{赵同学解出难题\}$，由题设知 A_1,A_2,A_3 相互独立.

（1）令 $A=\{$恰有一人解出难题$\}$，则 $A=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=\frac{13}{30}.\end{aligned}$$

（2）令 $B=\{$难题被解出$\}$，则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

1.5.2　独立性和系统可靠性

元件的可靠性：对于一个元件，它能正常工作的概率称为元件的可靠性.

系统的可靠性：对于一个系统，它能正常工作的概率称为系统的可靠性.

【例 1.27】　设构成系统的每个元件的可靠性均为 $p(0<p<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的，如果 6 个元件分别按照Ⅰ先串联后并联（见图 1-10）和Ⅱ先并联后串联（见图 1-11）的两种连接方式构成两个系统，试求它们的可靠性，并且比较两个系统可靠性的大小.

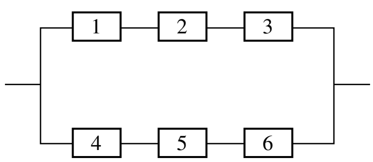


图 1-10

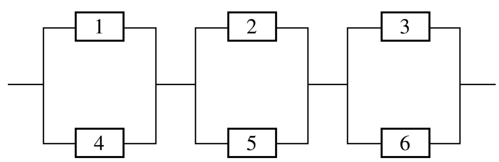


图 1-11

解　假设 $A_i=\{$第 i 个元件正常工作$\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，系统Ⅰ的可靠性为

$$\begin{aligned}p_1&=P[(A_1A_2A_3)\cup(A_4A_5A_6)]=P(A_1A_2A_3)+P(A_4A_5A_6)-P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)\\&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_4)P(A_5)P(A_6)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6)\\&=p^3+p^3-p^6=p^3(2-p^3).\end{aligned}$$

系统Ⅱ的可靠性为

$$\begin{aligned}p_2&=P\{(A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)(A_3\cup A_6)\}=P\{A_1\cup A_4\}P\{A_2\cup A_5\}P\{A_3\cup A_6\}\\&=[P(A_1)+P(A_4)-P(A_1)P(A_4)][P(A_2)+P(A_5)-P(A_2)P(A_5)]\cdot\\&\quad[P(A_3)+P(A_6)-P(A_3)P(A_6)]\\&=(2p-p^2)(2p-p^2)(2p-p^2)=p^3(2-p)^3.\end{aligned}$$

因 $(2-p)^3=2-p^3+6(p-1)^2>2-p^3$，故 $p_2>p_1$. 因此，系统Ⅱ的可靠性 p_2 大于系统Ⅰ的可靠性 p_1.

练习 1.5　封面扫码查看参考答案

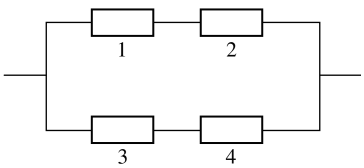
1. 已知事件 A 与 B 独立，且 $P(A)=p$，$P(B)=q$. 求 $P(A\cup B)$，$P(A\cup\overline{B})$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

2. 已知事件 A 与 B 独立，且 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\dfrac{1}{9}$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$. 求 $P(A)$，$P(B)$.

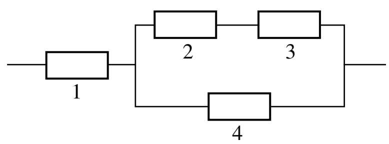
3. 三个人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 0.6，0.5，0.4，问三个人中至少有一个人能将此密码译出的概率是多少？

4. 假若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，混合 100 个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

5. 设有 4 个独立工作的元件 1，2，3，4，它们的可靠性分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，将它们分别按图(1)(2)方式连接，求系统的可靠性.



图(1)



图(2)

6. 若事件 A 与事件 B 相互独立，证明事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 也是相互独立的.

知识结构图

- 随机试验
- 随机事件
  - 概念：样本空间、样本点、基本事件、必然事件、不可能事件
  - 关系：子事件、相等、互不相容(互斥)、对立事件、相互独立
  - 运算：和、积、差
  - 运算律
- 频率与概率
  - 频率及其性质
  - 概率公理化定义
  - 概率性质
- 古典概型
  - 特征
  - 计算(步骤、公式)
  - 经典问题
- 几何概型
  - 定义
  - 计算
- 条件概率
  - 定义
  - 性质
  - 三大公式
    - 乘法公式
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式
- 事件的独立性
  - 定义
  - 性质
  - 应用

习 题 一

封面扫码查看参考答案

一、选择题

1. 甲、乙两人谈判，设事件 A，B 分别表示甲、乙无诚意，则 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示 （ ）

A. 两人都无诚意　　B. 两人都有诚意

C. 至少有一人无诚意　　D. 至少有一人有诚意

2. 设 A，B，C 表示三个随机事件，则 $\overline{ABC}$ 表示 （ ）

A. A，B，C 都发生　　B. A，B，C 都不发生

C. A，B，C 不都发生　　D. A，B，C 中至少有一个发生

3. 设 A，B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是 （ ）

A. $P(A\cup B)=P(A)$　　B. $P(AB)=P(A)$

C. $P(B|A)=P(B)$　　D. $P(B-A)=P(B)-P(A)$

4. 设 A，B 为任意两个事件，则 $P(A-B)=$ （ ）

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

5. 设当事件 A，B 同时发生时 C 也发生，则 （ ）

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

C. $P(C)=P(A\cup B)$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

6. 若事件 A，B 互不相容，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{8}$，则 $P(A-B)=$ （ ）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

7. 设 A，B 是样本空间中的两个事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，则 $P(\overline{AB})=$ （ ）

A. $\frac{11}{12}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{1}{12}$

8. 一袋中有 6 个白球，4 个红球，任取两球都是白球的概率是 （ ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

9. 一道选择题有 m 个答案，只有 1 个答案是正确的，某考生知道正确答案的概率为 p，乱猜的概率为 $1-p$，设他猜对答案的概率为$\frac{1}{m}$，则该考生答对这道题的概率是 （ ）

A. $p+\frac{1}{m}$　　B. $p+\frac{1}{m}(1-p)$　　C. $\frac{1}{m}(1-p)$　　D. $p-\left(1-\frac{1}{m}\right)$

10. 已知男人中有 $p\%$是色盲患者，女人中有 $q\%$是色盲患者（$p>q$），今从男、女人数相等的人群中随机选一人，恰好是色盲患者，则此人是男性的概率是 （ ）

A. $\dfrac{q}{p+q}$　　B. $\dfrac{q}{p-q}$　　C. $\dfrac{p}{p+q}$　　D. $pq(p+q)\%$

二、填空题

1. 设 A,B,C 为三事件，则事件“A 发生，而 B,C 不发生”，可用 A,B,C 的运算关系表示为______________.

2. 一书架上有 5 本小说、3 本诗集以及 1 本字典，今随机选取 3 本，则选中 2 本小说和 1 本诗集的概率是__________.

3. 对目标进行射击，直至击中为止，设每次击中目标的概率为 p，则第 k 次才击中目标的概率为__________.

4. 假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，那么：

(1) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$__________；

(2) 若 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$__________.

5. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内投掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为________.

三、解答题

1. 设事件 A,B 相互独立，A,C 互不相容，且

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3},P(C)=\frac{1}{4},P(B|C)=\frac{1}{8},$$

试求 $P(A\cup B)$，$P(C|A\cup B)$，$P(AB|\overline{C})$.

2. 设 A,B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，求 $P(A\cup B)$.

3. 100 件产品中有 10 件次品，现从中任取 5 件进行检验，求所取的 5 件产品中至多有 1 件次品的概率.

4. 设某人每次射击的命中率为 0.2，问必须进行多少次独立射击，才能使其至少命中 1 次的概率不小于 0.95?

5. 某建筑物按设计要求使用寿命超过 50 年的概率为 0.8，超过 60 年的概率为 0.7，若该建筑物已经历了 50 年，试求它在 10 年内坍塌的概率.

6. 系统由 n 个元件连接而成，设第 i 个元件正常工作的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，求：

(1) 当 n 个元件按串联方式连接时，系统正常工作的概率.

(2) 当 n 个元件按并联方式连接时，系统正常工作的概率.

7. 假设每个人的生日在任何月份内是等可能的. 已知某单位中至少有一个人的生日在一月份的概率不小于 0.96，该单位至少有多少人?

8. 一位学生接连参加同一门课程的两次考试. 第一次考试及格的概率为 p，若第一次考试及格则第二次考试及格的概率也为 p；若第一次考试不及格则第二次考试及格的概率为 $\dfrac{p}{2}$.

(1) 若至少有一次考试及格，则他能取得某种资格，求他取得资格的概率.

(2) 若已知他第二次考试已经及格，求他第一次考试及格的概率.

9. 有朋自远方来访,他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是0.3,0.2,0.1,0.4.已知他乘火车、轮船、汽车来的话,迟到的概率分别是$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{12}$,而乘飞机来,则不会迟到,结果他迟到了,试问他乘火车来的概率是多少?

10. 在套圈游戏中,甲、乙、丙每投一次套中的概率分别是0.1,0.2,0.3.已知三个人中某一个人投圈4次而套中1次,此投圈者是谁的可能性最大?

11. 设有n个颜色互不相同的球,每个球都以概率$\frac{1}{N}$分别落在$N(n\leqslant N)$个盒子中,且每个盒子能容纳的球数是没有限制的.试求下列事件的概率:

(1) $A=\{$指定的1个盒子中没有球$\}$;

(2) $B=\{$指定的n个盒子中各有一个球$\}$;

(3) $C=\{$恰有n个盒子中各有一个球$\}$;

(4) $D=\{$指定的1个盒子中恰有m个球$\}(m\leqslant n)$.

12. (匹配问题) 某人写了n封信给不同的n个人,并在n个信封上写好了各人的地址,现在每个信封里随意地塞进一封信,试求至少有一封信放对了信封的概率.

排列、组合公式

1. 全部排列组合公式的推导基于下列两条原理

乘法原理 若进行A_1过程有n_1种方法,进行A_2过程有n_2种方法,则进行A_1过程后再接着进行A_2过程共有$n_1\times n_2$种方法.

加法原理 若进行A_1过程有n_1种方法,进行A_2过程有n_2种方法,假定A_1过程与A_2过程是并行的,则进行过程A_1和过程A_2的方法共有(n_1+n_2)种.

2. 排列

从包含有n个元素的总体中取出r个来进行排列,这时既要考虑到取出的元素也要顾及其取出顺序.

这种排列可分为两类:第一种是有放回的选取,这时每次选取都是在全体元素中进行,同一元素可被重复选中;另一种是不放回选取,这时一个元素一旦被取出便立刻从总体中除去,因此每个元素至多被选中一次,在后一种情况,必有$r\leqslant n$.

(1) 在有放回选取中,从n个元素中取出r个元素进行排列,这种排列称为有重复的排列,其总数共有n^r种.

(2) 在不放回选取中,从n个元素中取出r个元素进行排列,其总数为

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

这种排列称为选排列.特别当$r=n$时,称为全排列.

(3) n个元素的全排列数为$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1=n!$

3. 组合

(1) 从n个元素中取出r个元素而不考虑其顺序,称为组合,其总数为

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

（2）分组：若 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，把 n 个不同的元素分成 k 个部分，第一部分 r_1 个，第二部分 r_2 个……第 k 部分 r_k 个，则不同的分法有 $\dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_k!}$ 种.

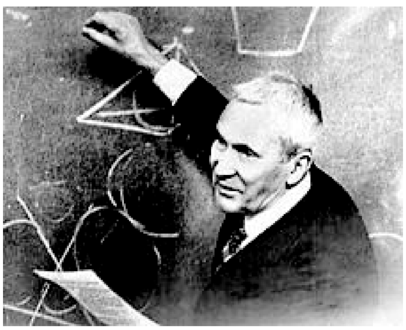
4. 排列、组合常用公式

（1）$C_n^m=C_n^{n-m}$.

（2）$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

约定：$0!=1$；当 $m>n$ 时，$C_n^m=0$.

（3）$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$.



科尔莫戈罗夫（A. N. Kolmogorov，1903—1987）